Rezumatul tezei de abilitare
”Rezultate în teoria punctului fix & probleme variaţionale vectoriale”

Această TEZĂ DE ABILITARE este bazată pe lucrările mele, realizate ca unic autor sau în colaborare, şi are trei direcţii principale de cercetare: teoreme de punct fix (de coincidenţă), procese iterative pentru determinarea punctelor fixe, şi probleme variaţionale vectoriale.

Primul capitol al acestei teze este dedicat teoriei punctului fix. Scopul său este de a prezenta o parte dintre rezultatele noastre în această direcţie în diverse spaţii metrice generalizate. Prima secţiune are la bază lucrarea [Fixed Point Theory Appl. 2014:135 (2014)], şi incepe cu studiul unor condiţii contractive de tip generalizat în cadrul oferit de spaţiile cu b-metrică. Acestea sunt definite cu ajutorul funcţiilor de tip comparaţie. Se demonstrează că două aplicaţii care îndeplinesc o astfel de condiţie contractivă au un punct fix comun, în ipoteza adiţională că cel puţin una dintre aceste aplicaţii este continuă, sau în situaţia în care funcţia comparaţie prin intermediul căreia se defineşte condiţia contractivă satisface o relaţie de tip $\limsup$. Considerând anumite cazuri particulare, se obţin rezultate privind existenţa şi unicitatea punctului fix. Cea de a doua secţiune se concentrează pe spaţiile cu metrică parţială, şi se bazează pe lucrarea noastră din [J. Math. Anal., 7(4), 25-44 (2016)]. Se începe cu prezentarea unor preliminarii legate de acest cadru de lucru. Sunt introduse contracţii generalizate, mai precis relaţii contractive generalizate de tip Kannan şi respectiv Chatterjea. Acest lucru este realizat cu ajutorul a două funcţii auxiliare înzestrate cu proprietăţi adecvate. Rezultatele principale din această secţiune se referă la faptul că aplicaţiile care verifică una dintre aceste inegalităţi contractive au un punct fix, care este unic. Demonstraţiile acestor teoreme se bazează pe construcţia unor şiruri convergente către un punct pentru care distanţa parţială la el însuşi nu este neapărat nulă. Cea de a treia secţiune este realizată din lucrarea noastră din [Fixed Point Theory Appl. 2013:153 (2013)]. Cadrul ales aici este cel furnizat de o generalizare a celor două tipuri de spaţii metrice prezentate în secţiunile anterioare, mai precis spaţiile cu quasi-metrică parţială. La început sunt prezentate câteva proprietăţi ale acestora, inclusiv în legătură cu situaţia în care quasi-distanţa parţială dintre două puncte este nulă. Prima dintre teoremele acestei părţi se referă la faptul că aplicaţiile care îndeplinesc o condiţie contractivă definită cu ajutorul unei anumite sume (în care termenii sunt quasi-distanţe dintre punctele domeniului de definiţie şi imaginile acestora prin aceste aplicaţii) posedă un punct de coincidenţă de tip pereche. În rezultatele următoare folosim un alt tip de contracţii generalizate, definite prin intermediul unei funcţii care are drept domeniu de definiţie o mulţime cu o anumită proprietate. Acestea se referă la faptul că îndeplinirea acestor inegalităţi impune existenţa unui punct de coincidenţă de tip pereche. În final sunt avute în vedere anumite cazuri particulare, în care se regăsesc rezultate din literatura de specialitate. Partea a patra a acestui capitol se dezvoltă în cadrul oferit de Ω-distanţe. În anul 2006, Mustafa şi Sims [J. Nonlinear Convex Anal. 7(2), 289-297 (2006)] au introdus o generalizare a spaţiilor metrice, aşa numitele spaţii cu G-metrică, ce asociază un număr real pozitiv oricărui triplet de elemente din mulţimea considerată. În 2010, această structură a fost înzestrată de Saadati *et al.* [Math. Comput. Modelling 52, 797-801 (2010)] cu o Ω-distanţă. În lucrările noastre din [Fixed Point Theory Appl. 2013:208 (2013)] şi [Fixed Point Theory Appl. 2013:275 (2013)] am avut în vedere această noţiune. La începutul acestei secţiuni sunt prezentate proprietăţi legate de acest concept, incluzându-le pe acelea care sunt folosite pentru demonstrarea G-convergenţei unor anumite şiruri. În acest context al Ω-distanţelor demonstrăm teoreme de punct fix şi de punct fix de tip pereche, relativ la clase adecvate de contracţii generalizate. Primele dintre aceste rezultate au în vedere relaţii contractive asemănatoare celor utilizate în partea anterioară a capitolului. Mai mult decât atât, sunt introduse două clase de condiţii contractive cu ajutorul a două clase de funţii care satisfac anumite proprietăţi de monotonie şi continuitate pentru una dintre acestea, respectiv inferior semi-continuitate pentru cea de a doua clasă avută în vedere. Se demonsterază că aplicaţiile care verifică aceste relaţii de tip contractiv generalizat au un punct fix unic, dacă sunt impuse anumite ipoteze adiţionale. De asemenea, aici se studiază şi probleme de existenţă a unui punct fix comun a două aplicaţii. În finalul capitolului sunt prezentate câteva cazuri particulare în care se regăsesc rezultate din literatura de specialitate. Subliniem faptul că metoda lui Jleli şi Samet [Fixed Point Theory Appl. 2012:210 (2012)] nu se poate aplica aici.

Capitolul 2 are drept scop studierea punctelor de cea mai bună proximitate în două spaţii-ambient diferite. În cazul aplicaţiilor pentru care domeniul de definiţie nu coincide cu codomeniul, de exemplu, este posibil ca acestea să nu aibă punct fix. În această situaţie, apare, în mod natural, următoarea întrebare: există un punct pentru care distanţa până la imaginea acestuia prin aplicaţia considerată este exact distanţa dintre domeniul şi codomeniul aplicaţiei considerate? Un instrument valoros în studierea acestor tipuri de probleme se dovedeşte a fi proprietatea (P) (slabă). Prima secţiune a acestui capitol are la bază lucrarea noastră [Filomat 29(1), 63-74 (2015)], şi are drept punct de plecare o lucrare a lui Samet [J. Optim. Theory

Appl. 159, 281-291 (2013)]. În aceasta, Samet demonstrează existenţa şi unicitatea unui punct de cea mai bună proximitate pentru o aplicaţie care verifică ipoteze ce se referă la un anumit tip de contractivitate, proprietatea (P), şi o condiţie de tip incluziune. Această teoremă este generalizată în articolul menţionat anterior. Contracţia generalizată utilizată de noi este definită cu ajutorul unei funcţii de tip comparaţie, şi, de asemenea, a unei funcţii de patru variabile, care este nulă dacă prima sau cea de a treia variabilă sunt nule. Rezultatul nostru privind cea mai bună proximitate este demonstrat în ipoteze mai generale decât cele folosite de Samet. Pe de o parte, condiţia contractivă este definită prin intermediul unei funcţii comparaţie, în timp ce la Samet se utilizează o funcţie c-comparaţie. Pe de altă parte, în cazul lui Samet se foloseşte proprietatea (P), iar aici impunem properietatea (P) slabă. Sunt prezentate şi rezultate privind punctele de cea mai bună proximitate de tip pereche. Sunt considerate cazuri particulare ale teoremelor fundamentate aici; ele se referă la existenţa şi unicitatea punctelor fixe. Ultima parte a capitolului se bazează pe lucrarea [J. Math. Anal. 7(4), 25-44 (2016)], şi este dezvoltată în contextul spaţiilor cu metrică parţială. Condiţiile contractive de tip generalizat sunt definite cu ajutorul a două clase de funţii înzestrate cu anumite proprietăţi, şi pot fi considerate ca fiind de tip Kannan şi, respectiv Chatterjea. Cu ajutorul proprietăţii (P) slabe sunt demonstrate teoreme de existenţă şi unicitate pentru aplicaţiile care verifică acest tip de relaţii. Rezultatele noastre sunt mai generale decât acelea ale lui Zhang şi Su [Fixed Point Theory Appl. 2014:50 (2014)], nu numai datorită ipotezelor mai generale, dar şi faptului că, în rezultatele lor, distanţa parţială la el însuşi a punctului limită a şirului utilizat în demonstraţia teoremei este nulă.

O parte importantă a teoriei punctului fix se referă la aproximarea numerică a acestora, în contextul unor condiţii contractive potrivite. Primul pas în sensul dezvoltării acestei direcţii de cercetare a fost făcut la sfârşitul secolului nouăsprezece, când Picard a introdus procesul iterativ care îi poartă numele. Urmând exemplul său, cercetătorii s-au îndreptat spre studiul acestei direcţii de cercetare, care a primit, în plus, un impuls şi prin dezvoltarea programării. După ce Mann [Proc. Amer. Math. Soc. 4, No.3, 506-510 (1953)] şi Ishikawa [Proc. Amer. Math. Soc. 44, No. 1, 147-150 (1974)] au introdus schemele iterative ce le poartă acum numele, atenţia s-a focalizat pe procesele iterative în trei paşi, acestea fiind mai rapide din punctul de vedere al convergenţei decât cele menţionate anterior. Gdawiec and Kotarski au ilustrat (inter)dependenţele dintre aceste scheme în [Appl. Math. Comput. 307, 17-30 (2017)]. Având în vedere analiza prezentată de ei, prima secţiune a capitolului 3 este dedicată studiului acelor procese care sunt independente. Contextul utilizat aici este cel al varietăţilor Hadamard, şi a fost discutat cu minuţiozitate cu QH Ansari şi J-C Yao. Capitolul debutează cu rezultate preliminare referitoare la varieţăţile Hadamard, functia exponenţială sau convergenţa Fejér. În acest context, sunt obţinute rezultate de convergenţă pentru procesele iterative ale lui Chugh *et* *al.* [Amer. J. Comput. Math. 2, No. 4, 345-357 (2012)] (iteraţia CR), Karhan şi Ozdemir [Adv. Fixed Point Theory 3, No. 3, 510-526 (2013)] (iteraţia S*), Thakur *et al.* [J. Inequal. Appl. 2014:328], Sainuan [Thai J. Math. 13, No. 2, 451-459 (2015)] (iteraţia P), Sintunawarat şi Pitea [J. Nonlinear Sci. Appl. 9, No. 5, 2553-2562 (2016)], Suantai [J. Math. Anal. Appl. 311, No. 2, 506-517 (2005)], Karakaya *et al.* [2015, arXiv: 1507.00200] şi [Abstr. Appl. Anal. 2013, ID 560258 (2013)], şi Thakur *et al.* [Appl. Math. Comput. 275, 147-155 (2016)]. În continuare, sunt analizate aspecte privind stabilitatea (T-stabilitatea) acestor scheme, demonstrându-se că ele sunt stabile în acest sens. Pentru a obţine un studiu complet al temei cosiderate, capitolul se încheie cu un studiu privind (in)dependenţa faţă de date, în care sunt folosite aplicaţii de tip aproximaţie.

Capitolul 4 este dedicat studiului unor clase de inegalităţi variaţionale vectoriale [J. Nonlinear Convex Anal., 19(3), 417-432 (2018)]. În prima parte este definită o ordine pe un spaţiu Banach, prin intermediul unui anumit con convex, şi sunt introduse primele două dintre clasele de inegalităţi variaţionale ce constituie obiectul de studiu al acestui captitol. Ele sunt formulate cu ajutorul unei aplicaţii cu valori în spaţiul operatorilor liniari şi continui între două spaţii Banach, şi o funcţie cu proprietăţi adecvate de tip continuitate şi convexitate. Acestor clase de probleme li s-au asociat o aplicaţie multivocă şi o mulţime de vectori, ale căror proprietăţi au fost studiate. Ataşându-se o problemă de punct fix, se demonstrează că, dacă sunt îndeplinite anumite condiţii adiţionale, aceste probleme variaţionale au soluţii. În plus, este găsită o funcţie de tip decalare, ale cărei caracteristici sunt studiate. Mai mult decât atât, sunt furnizate ipoteze în care această funcţie de tip decalare este înzestrată cu proprietăţi de mărginire. Ultima secţiune a capitolului se referă la două clase de inegalităţi variaţionale mai generale decât cele din prima parte, introduse cu ajutorul unei aplicaţii cu valori în spaţiul operatorilor liniari şi continui între două spaţii Banach, o funcţie cu proprietăţi adecvate de tip continuitate şi convexitate, şi o aplicaţie slab continuă. Aceste probleme sunt studiate prin intermediul analizei punctelor fixe asociate unei aplicaţii definite în mod propice. Se demonstrează că problemele variaţionale din secţiune au soluţie; de asemenea, sunt prezentate rezultate cu privire la o funţie de tip decalare asociată acestor clase de inegalităţi.

Capitolul 5 se bazează pe rezultatele noastre recente legate de probleme de optimizare multiobiectiv multitemporale, care sunt o continuare firescă a celor din [Balkan J. Geom. Appl. 14(2), 65-78 (2009)]. Introducem o clasă de probleme de optimizare multitemporale, în care funcţia obiectiv este un vector de funcţionale de tip integrală curbilinie, care este studiată într-un context adecvat. Prima parte a capitolului este dedicată demonstrării unor condiţii necesare de eficienţă pentru această clasă, şi a fost publicată în lucrarea noastră [Optim. Lett. 6(3), 459-470 (2012)]. Utilizând noţiunea de (ρ, b)-quasiinvexitate, sunt fundamentate condiţii suficiente de eficienţă pentru acest program [Optim. Lett. 6(8), 1657-1669 (2012)], cât şi pentru problema mai generală de minimizare a unui vector de câturi de funcţionale de tip integrală curbilinie supusă anumitor restricţii [Abstr. Appl. Anal. ID: 713765 (2012)]. Sunt demonstrate rezultate de eficienţă proprie pentru prima dintre clasele de probleme avute în vedere în acest capitol, prin intermediul unui tip de invexitate generalizată [J. Inequal. Appl. Art. No. 333 (2014)]. Mai mult decât atât, un studiu privind dualitatea în sensul lui Mond şi Weir este prezentat, incluzând teoreme de dualitate slabă, tare şi reciprocă. De asemenea, rezultate privind dualitatea în sensul lui Wolfe sunt obţinute în acelaşi context. Ultima parte, având la bază lucrarea [Optimal Control Appl. Methods, 37(5), 831-847 (2016)], utilizează (F, ρ)-pseudo-convexitatea în găsirea unor condiţii suficiente de eficienţă pentru problema mai complexă de minimizare a vectorului de câturi de funcţionale; în final sunt prezentate teoreme privind dualitatea.

Cuvinte cheie: Punct fix, spaţiu cu b-metrică, spaţiu cu metrică parţială, spaţiu cu quasi-metrică parţială, Ω-distanţă, punct de cea mai bună proximitate, proces iterativ în trei paşi, convergenţă, T-stabilitate, problemă variaţională, convexitate generalizată, eficienţă, dualitate.

Clasificare matematică 2010: 47H05; 47H09; 47H10; 47J05; 47J25; 49J35; 58E17; 65M12.